

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра общей физики и волновых процессов

Курсовая работа
студента 525 группы Бокарева Д. П.

**Исследование информационной эффективности измерения
дипольного момента атомного перехода при его
резонансном возбуждении**

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент
Гришанин Б. А.

2002 г.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	6
3	Качественное содержание квантовой информации	7
3.1	Принципиальное отличие в описании квантовых и классических систем	7
3.2	Основные типы информации	9
4	Описание модельного эксперимента	12
4.1	Блок-схема экспериментальной установки	13
4.2	Схема математических расчётов	14
5	Аналитическое рассмотрение задачи	15
5.1	Формула для расчёта среднего числа зарегистрированных фотонов и её следствия	16
5.1.1	Случай слабого поля	17
5.1.2	Случай сильного поля	17
5.1.3	Случай среднего поля	18
5.2	Вероятностные меры, определяющие количество совместимой информации . .	18
5.3	Формулы для расчёта совместимой информации	19
6	Численные расчёты	20
7	Выводы	21

1 Введение

Развитие физики на сегодняшний день достигло уровня, при котором наряду с теоретическим описанием квантовых систем вполне осуществимым является экспериментальное получение и исследование их состояний, неклассическая природа которых обеспечивает существенно квантовые свойства. Максимально эффективное использование данных свойств является основной задачей, решение которой часто оказывается крайне нетривиальным. Между тем, применение квантовых алгоритмов позволяет реализовывать качественно новые приложения, обладающие неоспоримым преимуществом по сравнению с классическими аналогами. Многие попытки практической реализации подобных методов сейчас находятся на стадии разработки. Некоторые из них, наиболее простые в осуществлении, уже в процессе реализации.

Реально поставлены лишь немногие эксперименты, использующие квантовые особенности исследуемых в них систем. В основном, это работы по проверке неравенств Белла [1]. Они явились первыми подтверждениями правильности теоретических расчётов. Одновременно с этим стало ясно, что далеко не все типы природных явлений могут быть описаны в рамках локальных теорий скрытых переменных, заменяющих стандартное квантовомеханическое описание [1]. Таким образом, сложившаяся ситуация стимулировала интерес физиков к дальнейшим изучениям и совершенствованиям квантовой теории. В результате трудов многих учёных на протяжении нескольких последних лет определились основные области использования квантовых устройств, самые передовые направления из которых видны уже сейчас [2].

Наиболее продвинутыми являются метрологические приложения [3]. В них предлагается создавать состояния со сжатым спином, с помощью чего можно понизить уровень квантовых проективных шумов, и тем самым повысить точность оптических атомных стандартов.

Другим возможным применением квантовой информации считается квантовая криптография [4]. В частности, применение квантовых методов позволяет осуществлять регистрацию любого прослушивания, так как при передаче сообщений по квантовым каналам сам процесс прослушивания не проходит незаметно для приборов, находящихся в процессе общения. Из-за невозможности копирования квантовых состояний [5], незаконное прослушивание любого сообщения, переданного посредством квантового канала (способа преобразования квантовых состояний, подобно описанного в ряде работ, например в [5, 6], а также ниже по тексту), процесс передачи сообщения по которому происходит в результате трансляция квантового состояния, кодирующего сообщение, от передатчика к приёмнику, приводит к снижению количества квантовой информации, характеризующей эффективность передачи состояний по каналу [5]. При этом, прямой расчёт количества квантовой информации помогает предотвратить “кражу” важного сообщения путём информирования сторон, осуществляющих диалог, о нежелательном вмешательстве в него постороннего слушателя. Таким образом, невозможным является безнаказанная “кража” секретных сведений, паролей и данных. Наиболее живой интерес к данной области приложений квантовой теории (и, в частности, теории квантовой информации [5]) проявляют всевозможные финансовые структуры, нежелающие мириться с подобными информационными потерями, часто приводящими к ощутимым денежным убыткам.

Много внимания уделяется квантовой телепортации [7–10]. Суть этого явления заключается в передаче сообщения о квантовом состоянии системы по классическому каналу. В процессе передачи информация о входном состоянии оказывается зашифрованной в классическом сообщении передаваемом по информационному каналу. Её использование позволяет восстановить исходное состояние, подвергнутое телепортированию. Существует возможность передачи повышенного количества классической информации через квантовый канал.

Этот процесс успешно реализуется посредством плотного квантового кодирования [11, 12].

Кроме этого, рассматривается перспектива создания квантовых компьютеров, использующих квантовые вычисления. Их преимуществом является высокое быстродействие по сравнению с обычными вычислительными машинами. Увеличение скорости расчётов достигается методом использования перепутанных состояний. Эффективность квантовых компьютеров по сравнению с классическими аналогами, использующими классическую логику при проведении вычислений, тем более очевидна, чем большее количество квантовых систем (которые обычно являются атомами, ионами или молекулами), хранящих информацию, участвуют в преобразованиях, осуществляющих квантовые математические алгоритмы. Самые лучшие из разработанных на сегодняшний день алгоритмов, позволяют получить выигрыш в производительности, пропорциональный экспоненте от количества задействованных в вычислениях квантовых систем. К сожалению, практически ни одного из подобных “хороших” алгоритмов не было осуществлено экспериментально. Дело в том, что в экспериментах должно использоваться множество независимых микроскопических систем атомного либо молекулярного размеров, обеспечивающих бесперебойное управление собой. На сегодняшний день экспериментальное осуществление данного условия невыполнимо. Однако, большое количество экспериментальных работ посвящено этой проблеме, и, хочется верить, они приведут к желаемому результату. Наряду с описанными направлениями использования квантовых свойств неклассических систем предлагаются и другие способы их применения, но в ближайшее время экспериментальное их исследование останется за гранью возможного.

При проведении эксперимента получения хороших результатов нужно подобрать объект, использование которого в качестве опытного образца обеспечит исследованию максимальную эффективность. В случае экспериментов с квантовыми системами такими объектами часто служат двухуровневая система и Λ -система. Преимущество первой состоит в простой структуре уровней и возможности наиболее простого управления ей. Любое экспериментальное подтверждение какой-либо новой теории, представляющее собой исследование атомных систем, всегда начинается с объекта, способного быть описанным в терминах двухуровневой системы. Наиболее известными из подобных природных систем, часто встречающихся в экспериментальных работах являются ионы Ca. Двухуровневая система позволяет качественно понять самые важные особенности наблюдаемых явлений и численно оценить их масштабы. Очевидным логическим продолжением исследования таких систем является переход к исследованию более сложных объектов, таких как многоуровневые атомы или, хотя бы, даже описанная ниже Λ -система.

Она, обладая несколько более богатым набором уровней, является хорошим хранителем информации. Структура нижних уровней системы, характерное время перехода между которыми составляет в некоторых случаях порядка нескольких минут, позволяет осуществить длительное хранение запасённой в ней информации. Λ -система получила широкое применение во многих экспериментах по исследованию её квантовых свойств и свойств систем, находящихся с ней во взаимодействии. Частое использование этой системы на практике объясняется также её достаточно широким распространением в природных условиях. Объектами, при описании поведения которых можно использовать модель Λ -системы, являются атомы Na, K, Rb, Cs и ионы Be^+ , Ca^+ щелочных металлов [13]. Дополнительным преимуществом данных элементов является наличие на внешней орбите всего одного электрона. Этот факт обуславливает относительную простоту их спектров. Подуровни расщепления основного состояния $^2S_{\frac{1}{2}}$ этих атомов и ионов позволяют сохранять информацию в течение достаточно долгого времени и являются аналогом нижних уровней Λ -системы при описании эволюции данных объектов.

Одним из направлений теоретических исследований процессов трансляции сообщений через квантовые каналы является расчет квантовой информации, переданной за время трансляции. Передача квантовой информации сопровождается любой процесс передачи квантовых состояний посредством информационного канала. Квантовая информация позволяет оценивать эффективность квантовых измерений и качественно сравнивать разные схемы проведения экспериментов. Например, зная зависимость когерентной информации от времени можно рассчитать пропускную способность квантового канала [14]. Данная характеристика также несет в себе сведения о процессе трансляции, которые используются для выбора значений параметров канала, необходимых для более эффективного его использования.

Вообще, при анализе информационных систем методом расчёта информации, которая может быть передана в процессе измерения в ходе какого-либо эксперимента, удобно пользоваться понятием информационного канала. *Информационным каналом*, осуществляющим передачу значения физической величины, называется совокупность передающих и регистрирующих систем, а также внешних и внутренних условий, влияющих на значение, полученное в результате передачи. Таким образом, процесс измерения отображается информационным каналом, на вход которого подано измеряемое значение, а результат определяется выходом. В зависимости от методов математического описания каналов, их разбивают на три вида: классические, полуклассические и квантовые. Если в первом случае, имеется относительная простота теории и доказаны мощные теоремы касающиеся передачи информации [15] (например, центральная теорема кодирования), то для последних двух видов каналов построение полной теории ещё не закончено и многие аналоги классических теорем оказываются совсем не очевидными. Между тем, попытки создать общую теорию квантовых и полуклассических каналов ведутся и, возможно, новые получаемые теоретиками результаты помогут решить существующую проблему.

Трудности в математическом описании неклассических каналов объясняются спецификой алгебры квантовых событий. В данном случае появляется бесконечно много базисных состояний, по которым производится разложение состояния рассматриваемой системы. Они произвольно ориентированных друг относительно друга, и определение понятия классической информации (информации Шеннона) становится невозможным. Таким образом приходится вводить понятие новой информации, использующей квантовый формализм описания события. Представление квантового состояния осуществляется с помощью матрицы плотности $\hat{\rho}$, являющейся разложением по матрицам плотности чистых состояний рассматриваемого события $\hat{\rho} = \sum_k p_k \psi_k \psi_k^+$, где ψ_k представляет собой волновую функцию чистого состояния системы. Следует ожидать, что понятие неклассической информации, будет определяться соотношением между вероятностями p_k появления системы в чистых состояниях $\psi_k \psi_k^+$.

Новейшим типом квантовой информации, введённым в самое последнее время, является понятие совместимой информации [5]. Она позволяет учитывать в классическом виде квантовую специфику входного и выходного состояний информационного канала. Начало оперирования этим термином приходится на 2001 год. При этом задача более полного изучения и развития данного типа информации требует скорейшего решения. Есть основания полагать, что этот вид информации наиболее эффективно описывает все особенности трансляции квантовых состояний через информационные каналы. Вероятно, этот тип информации может служить некоторым обобщением информации Шеннона на случай физики квантовых состояний. Одновременно, возможно также ожидать, что совместимая информация является завершающим этапом поиска наиболее удачного информационного описания трансляции квантовых состояний посредством информационного канала. Ответы на вышепоставленные вопросы должны расставить все точки над i в теории квантовой информации. По-этому, задача

интенсивного изучения и развития данного направления стоит особенно остро.

2 Постановка задачи

Целью данной работы является расчёт совместимой информации, переданной посредством квантового информационного канала. Проанализировав полученное значение, можно указать на условия использования канала, при осуществлении которых передача требуемой информации через него будет осуществлена наиболее эффективно. Для иллюстрации описанного метода анализа квантового информационного канала будет рассмотрена схема эксперимента по измерению дипольного момента двухуровневого атома. Расчёт совместимой информации позволит нам понять, какие характерные величины параметров, определяющих качество эксперимента (таких, как величина возбуждающего лазерного поля и длительность проводимых измерений) необходимо поддерживать для того, чтобы обеспечить оптимальный режим проведения эксперимента.

Для более ясного понимания сути поставленной задачи коротко рассмотрим процесс трансляции информации посредством квантового информационного канала.

В рассматриваемом случае передачи квантовых состояний совместимая информация играет роль аналогичную роли информации Шеннона [15] применительно к классическому описанию случайных событий. В алгебре событий, описывающей случайные состояния классических объектов, любое событие представимо в виде разложения по базисным событиям, суммарная вероятность обнаружения которых равна единице (выполняется условие нормировки). Информация Шеннона определяется соотношением между вероятностями ω_k появления данных элементарных событий. Её величина S согласно Шеннону равна

$$S = - \sum_k \omega_k \log[\omega_k], \quad (1)$$

Формула (1) имеет место, если физическая величина обладает дискретным спектром значений, то есть количество возможных её собственных значений конечно либо счётно. На практике же чаще всего приходится иметь дело с физическими величинами, обладающими непрерывным спектром возможных собственных значений. В этом случае сумму в формуле (1) необходимо заменить на определённый интеграл, вероятность появления значений на функцию плотности вероятности их появления. В итоге (1) примет вид

$$S = - \int_K p(k) \log[p(k)] dk, \quad (2)$$

K — полное множество всевозможных собственных значений, рассматриваемой физической величины.

Теперь обратимся к случаю, когда в качестве события можно выбрать процесс наблюдения случайного появления собственных значений нескольких разных физических величин, например A, B, C, \dots . При этом часто бывает так, что величины не являются независимыми и их появление описывается условным распределением $\omega_{k_A|k_B, k_C, \dots}$, где k_A, k_B, k_C, \dots — собственные значения физических величин A, B, C, \dots . В случае непрерывного спектра появление значений k_A, k_B, k_C, \dots описывается функцией плотности условного распределения вероятностей $p(k_A|k_B, k_C, \dots)$. Также, часто наблюдаются ситуации, когда одновременно регистрируется появление нескольких, связанных между собой величин, спектры собственных значений которых представляют суперпозицию непрерывной и дискретной функций. Данная ситуация не

усложняет понимание сути физической проблемы, но немного удлиняет математическое её описание. По-этому, мы не будем рассматривать такой специфический случай, тем более, что рассмотренные в работе величины обладают непрерывными спектрами. Таким образом, при рассмотрении двух физических зависимых друг от друга величин A и B , мы получим итоговое выражение для расчёта количества информации Шеннона

$$S = - \int_{K_A} dk_A \int_{K_B} \log\left[\frac{p(k_A|k_B)}{p(k_A)}\right] p(k_A) dk_B. \quad (3)$$

$p(k_A)$ определяется, как $p(k_A) = \int_{K_B} p(k_A|k_B) dk_B$ и представляет собой функцию плотности распределения вероятности наблюдения значения случайной величины A .

Если случайное событие возникло в результате измерения в ходе какого-нибудь эксперимента, то информация, рассчитанная по формулам (1), (2), (3), определяет десятичный логарифм числа точек, которое может быть передано по классическому каналу без искажения в ходе проводимого измерения. Каналом здесь является совокупность регистрирующих приборов.

Применительно к информационным каналам, вход и выход которых обладают квантовой природой, введено понятие совместимой информации, являющейся аналогом информации Шеннона для квантового случая и определяющей десятичный логарифм числа квантовых состояний, которые могут быть переданы на выход канала без искажения. Или, иначе говоря, количество совместимой информации равно десятичному логарифму состояний, которые будучи переданными на выход канала, могут быть впоследствии различены без ошибки. Численное значение совместимой информации может быть рассчитано по формуле

$$I = - \int_{K_A} \int_{K_B} \log\left[\frac{P(dk_A|dk_B)}{P(dk_A)}\right] P(dk_A), \quad (4)$$

здесь введённый символ $P(k)$ нужно рассматривать, как $P(k) = p(k)dk$ — вероятность обнаружить элемент k в дифференциальном объёме $[k, k + dk]$ фазового вероятностного пространства K множества возможных значений $k \in K$.

В работе [5] рассматриваются все важнейшие и часто используемые типы классической и квантовой информации, известные в настоящее время. А также вводится понятие совместимой информации с одновременным обоснованием своевременности его введения. Настоящая работа по расчёту совместимой информации базируется на фундаментальной теории, объяснённой в статье [5], и является приложением понятия совместимой информации к расчёту эффективности измерений дипольного момента атомного перехода, проводимых в эксперименте, осуществляемом по предлагаемой в курсовой работе схеме.

3 Качественное содержание квантовой информации

3.1 Принципиальное отличие в описании квантовых и классических систем

Понятие квантовой информации непосредственно связано с основными законами квантовой физики и, возникнув параллельно с их становлением, играет в ней ключевую роль. Любой квантовый эффект, например, существенно микроскопический процесс спонтанного излучения атома или макроскопический переход в сверхпроводящее состояние может быть явно

связан с процессами преобразования квантовой информации, если только адекватно связать эту информацию с соответствующими ансамблями квантовых состояний.

Информационные соотношения между квантовыми состояниями определяются динамическими свойствами физической системы и являются наиболее фундаментальным проявлением её динамических характеристик. Они могут характеризовать как собственную динамику некоторой квантовой системы, так и её взаимодействие с другими системами. Исходно они представляются уравнениями для волновых функций или операторов квантовых состояний, а суть теоретико-информационного подхода состоит во введении соответствующей количественной меры информационного обмена.

До тех пор, пока не обсуждается конкретная схема физического эксперимента, описание квантовой системы сводится именно к выявлению её информационных характеристик, количественно выражающих соотношения между квантовыми состояниями данной системы и состояниями других систем, с которыми она может взаимодействовать. Например, основное информационное содержание процесса излучения двухуровневого атома сводится к переходу заложенной в нём квантовой информации к соответствующему кванту фотонного поля (точнее, к двухуровневой системе вакуум—квант). При этом данный квант получает информацию о фазе исходного атомного состояния, т. е. информационный обмен является специфически квантовым, сохраняющим когерентность между трансформируемыми волновыми функциями [5].

Фундаментальная концепция информационной меры классической информации вводится в теории информации, созданной Шенноном [16, 17]. Для классических систем физических событий можно универсальным образом ввести количественную меру объёма информации, позволяющую для объединения многих каналов с помехами выразить асимптотически достижимый уровень объёма безошибочно передаваемой информации в виде оптимизированного значения шенноновского количества информации. Данная теория основана на специфическом свойстве классических ансамблей, которое исключено из исходных принципов квантовой физики. Этим свойством является *воспроизводимость* классических событий: статистически нет никакого различия, имеете ли вы на входе и выходе физически одну и ту же систему или её информационно эквивалентную копию. Последнее же невозможно в квантовом мире, и, очевидно, именно с этим обстоятельством связано возникновение дискуссии о том, может ли вообще информационная мера Шеннона каким-либо образом использоваться применительно к квантовым системам [18–20].

Как показывается в работе [5], традиционное определение энтропии Шеннона и соответствующей информационной меры может быть с успехом использовано и для анализа квантовых систем при условии корректного учёта фундаментальных различий между ансамблями классических и квантовых событий.

Специфика квантовой теории состоит в принципе суперпозиции квантовых состояний — сосуществования наряду с состояниями $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ и их произвольной линейной комбинации $c_1 |\alpha\rangle + c_2 |\beta\rangle$, что приводит к существованию в любой квантовой системе континуального множества — гильбертова пространства состояний $H \ni \psi$, подавляющая часть которых не совпадает ни с одним из ортогональных базисных состояний $|n\rangle$, связанных с некоторой физической величиной, описываемой оператором $\hat{A} \sum \lambda_n |n\rangle \langle n|$. Выполнение квантовых преобразований над системой преобразует не только базисные векторы, но и всё гильбертово пространство, что и используется в алгоритмах квантовых вычислений, радикально повышая их эффективность за счет высокой степени параллелизма выполняемых операций [21–23]. Однако, это континуальное множество состояний не содержит неограниченного объёма информации в её обычном классическом понимании.

Дело в том, что возможность безошибочно отличить одно произвольное квантовое состояние $|\alpha\rangle \in H$ от другого $|\beta\rangle$ имеется только для ортогональных состояний. Вероятность же случайного совпадения двух произвольно взятых состояний определяется квадратом модуля скалярного произведения, так что двумерная плотность вероятности двух равновероятно выбранных состояний имеет вид

$$P(d\alpha, d\beta) = |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 \frac{dV_\alpha dV_\beta}{D}, \quad (5)$$

где dV_α, dV_β — дифференциалы объёма на сфере волновых функций, удовлетворяющие условию нормировки $\int |\alpha\rangle \langle \alpha| dV_\alpha = \hat{I}$, а D — размерность пространства H . Теория информации Шеннона позволяет рассчитать эффективное число N_α состояний α , различаемых переменной β и наоборот [24]. Распределение вероятностей (5) описывает информационный обмен между двумя информационными переменными α и β , а в соответствии с теорией Шеннона он характеризуется эффективным числом N_α (достигаемым в расчёте на один символ при рассмотрении бесконечно длинных последовательностей с независимо передаваемыми единичными символами) безошибочно переданных сообщений, сформированных из подмножеств A_α значений индексов квантовых состояний α . Если сопоставить каждому A_α наиболее подходящие состояния α , то все эти состояния будут безошибочно различимы, так что N_α и есть число различимых состояний. Оно определяется соответствующим количеством информации Шеннона

$$I_{\alpha\beta} = \int \log_2 \frac{P(d\alpha, d\beta)}{P(d\alpha)P(d\beta)} P(d\alpha, d\beta)$$

по формуле $N_\alpha = 2^{I_{\alpha\beta}}$.

С учётом вышесказанного становится очевидным, что ключевое различие между классической и квантовой информацией связано с учётом *совместимости* или *несовместимости* состояний, с которыми связана представляющая интерес информация. Состояния различных систем, рассматриваемые в один и тот же момент времени, всегда совместимы. По-этому, они не могут копировать друг друга, если содержат внутренне несовместимые состояния. И наоборот, полные ансамбли квантовых состояний одной и той же системы, рассматриваемые в два различных момента времени, чаще всего несовместимы и, более того, в отсутствие шумов могут копировать друг друга, в каждый момент времени сохраняя уникальность своих квантовых флуктуаций. Разномоментные же состояния двух различных систем могут быть как совместимы, так и несовместимы, в зависимости от вида преобразования, связывающего эти два момента времени. Этот фактор весьма существенен при рассмотрении основных определений количественных мер квантовой информации [5]

3.2 Основные типы информации

В соответствии с изложенными соображениями наиболее фундаментальная классификация квантовой информации связана с описанным свойством совместимости или несовместимости рассматриваемых ансамблей состояний. В результате выделяются следующие четыре основных типа информации:

- *Классическая информация* — все состояния совместимы, и в исходной форме теории информации Шеннона рассматриваются как классические "по умолчанию" [16, 17]. Отметим, однако, что классическая информация всегда может быть передана по квантовому каналу и также представляет определённый интерес в квантовой физике. Классиче-

ский канал задаётся условным распределением вероятностей $p(y|x)$ состояний выхода y при фиксированных состояниях входа x .

- *Полуклассическая информация* — вся информация на входе задаётся классическими состояниями λ , а состояния выхода содержат внутреннюю квантовую несовместимость как квантовые состояния в гильбертовом пространстве H , которые, тем не менее, автоматически совместимы с состояниями входа. Квантовый канал в общем случае описывается ансамблем смешанных квантовых состояний $\hat{\rho}_\lambda$, зависящих от классического параметра λ [25, 26]. Переменные λ эквивалентны входным переменным x , множество всех волновых функций $\psi \in H$ — выходным состояниям y , а матрица плотности $\hat{\rho}_\lambda$ — условному распределению вероятностей $p(y|x)$ классического канала.

Следующие два типа информации определяются, как полностью квантовые объекты, при этом в работе [5] авторами высказано мнение, что когерентная и совместимая информации исчерпывают все возможные качественно различные типы информации в полностью квантовых каналах. Для достижения наилучшего понимания их роли в теории информации отдельно остановимся на описании каждого из оставшихся типов информации. Более подробные сведения всегда можно получить, ознакомившись со статьёй [5].

- *Когерентная информация* — пространства состояния входа и выхода содержат как внутреннюю квантовую несовместимость, так и несовместимы взаимно, будучи связанными супероператором канала \mathcal{N} , преобразующим матрицу плотности входа в матрицу плотности выхода: $\hat{\rho}_B = \mathcal{N}\hat{\rho}_A$ [27, 28]. Преобразование \mathcal{N} определяет поток квантово несовместимых состояний от входа канала к его выходу и является полностью квантовым аналогом классического условного распределения $p(y|x)$, которое осуществляет аналогичное линейное преобразование классического входного распределения вероятностей $p(x)$ в выходное распределение $p(y)$.

Поскольку простейшим носителем квантовой информации является двухуровневая система — аналог классического бита, с учётом этого традиционно называемый *кубитом*¹, то соответствующую ему количественную меру специфически квантовой когерентной информации по традиции также называют кубитом. Этому выбору единицы когерентной информации, очевидно, соответствует в определении использование логарифма по основанию 2, что и даёт $I_c = 1$ кубит для случая двухуровневой системы с матрицей плотности вида $\hat{I}/2$, соответствующей состоянию с максимально возможной квантовой энтропией, в котором максимально и равноправно представлены все возможные квантовые состояния.

Среди других типов квантовой информации когерентная информация позволяет различать два качественно различных класса информационного обмена, соответствующих обмену посредством классической информации и квантового перепутывания состояний. Когерентная информация является ненулевой только в последнем случае. Поэтому именно когерентная информация адекватна для обсуждения вопроса, в какой степени квантовый канал передачи информации сохраняет способность использования выхода как эквивалента входа для реализации задач, в которых существенна именно квантовая специфика входного сигнала. Данной проблематике посвящено большое количество современных публикаций (см. [21] и ссылки в ней). Являясь мерой сохранённой перепутанности квантовой системы после выполнения физического преобразования, когерентная информация в настоящее время представляет и определённый практический интерес в связи с задачами передачи и обработки квантовой инфор-

¹ Термин кубит был впервые введен Шумахером в работе [29].

мации, также как и её применение к анализу конкретных физических моделей квантовых каналов.

- *Совместимая информация* — вход и выход содержат внутренне несовместимые состояния, но взаимно совместимы.

В то время как три первых типа информации хорошо известны в литературе [17, 25, 27], включая относительно недавно введённую меру когерентной информации, совместимая информация как особый тип информационной меры в явной форме введена лишь в самое последнее время [30]. Она определяется для составной двухчастичной системы с совместимыми входом и выходом, включающими внутреннюю квантовую несовместимость.

При рассмотрении одномоментных средних значений квантовых физических величин внутреннего квантовая несовместимость проявляется просто как статистическая неопределённость, для учёта которой достаточно ограничиться введением эквивалентного классического распределения вероятностей. С использованием вероятностной меры

$$P(d\alpha) = \langle \alpha | \hat{\rho}_A | \alpha \rangle dV_\alpha \quad (6)$$

на множестве всех квантовых состояний среднее значение любого оператора $\hat{A} = \sum \lambda_n |n\rangle \langle n|$ может быть представлено как $\langle \hat{A} \rangle = \sum \lambda_n dP/dV_\alpha(\alpha_n)$, где $|\alpha_n\rangle |n\rangle$. Здесь dV_α описывает дифференциал объёма в пространстве физически различных состояний D -мерного гильбертова пространства H_A ($\int dV_\alpha = D$), которое для случая кубита, т. е. $D = 2$, представляется сферой Блоха [5]. Соотношение (6) есть среднее от операторной меры

$$\hat{E}(d\alpha) = |\alpha\rangle \langle \alpha| dV_\alpha, \quad (7)$$

которая является специальным случаем неортогонального разложения единицы [31], или, иначе, положительной операторно-значной мерой (ПОМ, POVM) [32, 33].

ПОМ описывают соответствующие процедуры обобщённого квантового измерения, которое, в отличие от прямого измерения в исходной системе, описываемого ортогональным разложением единицы — ортопроекторной мерой в H_A — выполняется в составном пространстве $H_A \otimes H_a$ с подходящим дополнительным пространством состояний H_a и совместной матрицей плотности вида $\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_a$, которая не содержит никакой дополнительной информации об A сверх информации, уже содержащейся в матрице плотности $\hat{\rho}_A$.

Обобщённое квантовое измерение вида (7) переводит неопределённость, содержащуюся в системе A в форме квантовой несовместимости множества всех её квантовых состояний, в классическую статистическую неопределённость количественно эквивалентного множества совместимых событий в системе $A+a$. Разумеется, при таком представлении когерентные соотношения, характерные для исходной квантовой системы, преобразуются в соответствующие классические корреляции, которые уже не имеют никакой квантовой специфики. Тем самым результат такого измерения не является эквивалентом исходной системы с точки зрения возможностей выполнения дальнейших квантовых преобразований, что является неизбежной “платой” за представление информации в классической форме, допускающей её свободное использование. Тем не менее, исходные квантовые корреляции учитываются в статистике результирующих классических состояний.

Пусть заданы два гильбертова пространства H_A и H_B соответствующих квантовых систем A , B и задана совместная матрица плотности $\hat{\rho}_{AB}$ в $H_A \otimes H_B$. В частности, они могут соответствовать подсистемам составной системы $A+B$, заданным в один и тот же момент времени t

и могут рассматриваться как вход и выход абстрактного квантового канала в реальной физической системе. Определяющим свойством подсистем A и B является их совместимость. Следовательно, совместное измерение, представленное двумя ПОМ как $\hat{E}_A \otimes \hat{E}_B$, не вводит никаких новых корреляций между входом и выходом и может рассматриваться как индикатор информационных соотношений между входом и выходом. Соответствующее совместное распределение вероятностей имеет вид:

$$P(d\alpha, d\beta) = \text{Tr} [\hat{E}_A(d\alpha) \otimes \hat{E}_B(d\beta)] \hat{\rho}_{AB}. \quad (8)$$

Соответствующая информация Шеннона $I = S[P(d\alpha)] + S[P(d\beta)] - S[P(d\alpha, d\beta)]$ тогда определяет количество *совместимой* информации [30, 34].

Физическое содержание совместимой информации зависит от специфического выбора измерительной процедуры и представляет квантовую информацию на выходе, доступную через посредство двух ПОМ, которые селективируют в форме классических носителей α и β информацию о квантовом состоянии входа, поступающую на выход.

Рассмотрим специальный случай, когда α и β индексируют все квантовые состояния в H_A и H_B в соответствии с конкретным видом обеих ПОМ в форме (7). В этом случае совместимая информация распределена по всем квантовым состояниям и ассоциирована со всей внутренней квантовой неопределённостью состояний входа, которая учитывается автоматически в распределении вероятностей (6). В частности, информация, содержащаяся в квантовых корреляциях, имеющих место в случае наличия квантовой перепутанности между A и B , также принята в расчёт в совместном распределении вероятностей (8). Кроме того, совместимая информация в данном случае обладает свойством *операционной инвариантности*, введённым в [35], т. е. все некоммутативные физические переменные учитываются в данной информационной мере равноценным образом. Описанное представление квантовой информации посредством классических распределений вероятностей может рассматриваться как развитие представлений квантовой механики в терминах классических физических переменных в приложениях к лазерной физике, обсуждавшееся ещё в лекциях Глаубера [36] (см. также [37]).

Выполненный в рамках работы [5] анализ возможностей применения информационного подхода к реальным экспериментам показывает, что только совместимая информация является адекватной для оценки информационной эффективности абстрактно определённой схемы квантового физического эксперимента.

4 Описание модельного эксперимента

Теперь обратимся к практическому аспекту использования понятия совместимой информации. Для иллюстрации возможностей, которые даёт расчёт количества квантовой совместимой информации, извлечённой за время проведения эксперимента рассмотрим схему измерения, описываемую в данном разделе. Возможно слово “извлечённой” может показаться неясным, ибо априори не понятно в каком виде должна быть извлечена информация, и откуда она возникает. Для этого напомним, что совместимая информация учитывает всю квантовую неопределённость параметров квантовой системы, описывающих её состояние в классическом виде. Таким образом, становится ясно, что совместимая информация описывает ту часть квантовой специфики исходной системы, поступающей на вход информационного канала, (каналом в данном случае является процесс измерения квантовых свойств исследуемого объекта), которая безошибочно переходит в классические характеристики системы, находящейся

на выходе (которая в нашем случае она представлена измеряющей аппаратурой). Процедура измерения будет осуществлена наиболее эффективно в случае создания благоприятных условий для проведения эксперимента. Такие условия обеспечивают максимально возможный уровень передачи по каналу информации от входа к выходу. Иначе говоря, определив условия максимума совместимой информации, мы автоматически получаем условия, необходимые для максимальной эффективности измерений, проводимых в ходе эксперимента.

Для дальнейшего рассмотрения обратимся к анализу экспериментальной схемы, в которой предлагается измерить значение дипольного момента межуровневого атомного перехода. Для данной процедуры рассчитаем количественную меру совместимой информации, извлекаемой в процессе измерения. На основе полученных данных определим эффективность проводимого эксперимента, а также условия, осуществление которых позволит достичь наилучших успехов в получении правильных результатов и даст возможность использовать экспериментальную установку с максимальной полезной отдачей.

В качестве измеряемой квантовой системы выберем простейшую её реализацию в виде двухуровневого атома. Это, в первую очередь, позволит нам максимально упростить математические расчёты, которые, однако, даже в этом вырожденном случае оказываются отнюдь не тривиальны. Вторым аргументом в пользу рассмотрения двухуровневой системы является возможность качественно проследить за всеми характерными особенностями расчёта и приложения совместимой информации к описанию указанного эксперимента.

4.1 Блок-схема экспериментальной установки

Пусть имеется двухуровневая система с точно известной частотой перехода ω_{12} , но неизвестной величиной дипольного момента d_{12} , измерить которую требуется в данной задаче (см. рис. 1). Осуществить это можно, измерив, сначала, например, скорость распада возбуждённого состояния γ , а после по известной формуле (9) рассчитать дипольный момент перехода. Формула, связывающая величины γ и d_{12} имеет вид

$$\gamma = \frac{4}{3} \frac{d_{12}^2 \omega_{12}^3}{\hbar c^3}. \quad (9)$$

Схематически процедура измерения представлена на рис. 4.1. Возбуждение двухуровневого атома происходит посредством стационарного монохроматического излучения интенсивности E с частотой, равной резонансной частоте ω_{12} межуровневого перехода. Под действием возбуждающего поля, спустя некоторое время, атом переходит в состояние стационарного излучения. Он излучает некоторое количество фотонов в единицу времени (решение задачи о флуоресценции двухуровневого атома можно найти в книге [37]). Кванты поступают на фотодетектор, представляющий собой классический счётчик попавших на него частиц, показания которого пропорциональны их количеству. Для того, чтобы появилась возможность зарегистрировать как можно больший процент фотонов, между излучающей и улавливающей системами необходимо поставить фокусирующее устройство, собирающее поступающее на него кванты на небольшую поверхность детектора. В данной работе в качестве такого устройства рассмотрена собирающая линза с апертурой S_0 . Измеряя число испущенных фотонов и зная соотношение между ним и дипольным моментом перехода можно рассчитать искомое значение d_{12} . Управляющими параметрами, характеризующими условия проведения эксперимента являются амплитуда напряжённости возбуждающего поля E , и время T проведения измерения. Именно по данным параметрам должна производиться оптимизация канала, основанная на результатах расчёта совместимой информации.

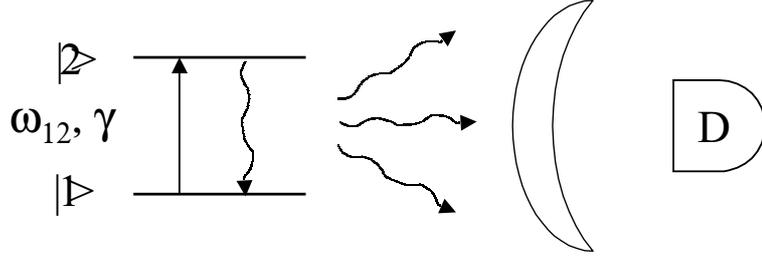


Рис. 1: Схема измерения дипольного момента атома. Атом возбуждается лазерным полем и уровень его фотонной эмиссии измеряется фотодетектором, регистрирующим число поглощённых квантов за фиксированный интервал времени.

4.2 Схема математических расчётов

При дальнейшем рассмотрении эксперимента удобно обозначить измеряемый дипольный момент исследуемой системы буквой a . При этом количество фотоотсчётов зарегистрированных детектором — символом b . Такое обозначение рассматриваемых переменных удобно, ибо в этом случае можно легко провести соответствие с общей теорией, описанной в [5]. Для математического описания процесса измерения удобно использовать операторное представление физических переменных. Тогда имеем, что оператор \hat{N}_D числа фотонов, испущенных атомом в момент времени t и к моменту $t + T$, достигших детектора имеет вид

$$\hat{N}_D = \frac{c}{4\pi\hbar\omega_{12}} \aleph \int [\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}] \cdot \mathbf{n} dS, \quad (10)$$

где \aleph обозначает символ нормального упорядочения полевых операторов, согласно [38] выделяющий ту часть энергии поля, которая оказывает воздействие на детектор, находящийся в невозбуждённом состоянии, то есть, часть энергии, поглощаемой фотосчётчиком. Число квантов, измеряемое детектором, отличается коэффициентом эффективности фотодетектора. Это различие может в общем случае сопровождаться и дополнительной ошибкой измерения, однако эти, в определённом смысле технические аспекты фотодетектирования в данной работе не затрагиваются, а предел информативности системы связывается здесь только с самой фотонной природой используемого информационного канала.

С учётом того, что измеряемые переменные b есть в данном случае дискретные (но не обязательно целые в силу наличия числовых множителей произвольного вида) собственные значения оператора числа квантов \hat{N}_D (10), положительная супероператорная мера, описывающая процедуру квантового измерения, имеет вид

$$\mathcal{B}(db) = \hat{E}(b) \odot \hat{E}(b) db, \quad (11)$$

где $\hat{E}(b)$ — собственные ортопроекторы оператора \hat{N}_D , соответствующие собственному значению b . Разумеется, при использовании этой меры следует помнить, что реально оператор (10) описывается функционалом зависящего от времени оператора населённости возбуждённого атомного уровня. Дискретность этого функционала при большом количестве регистрируемых фотонов, однако, не имеет значения.

Матрица плотности, отвечающая переменным, определяющим \hat{N}_D , зависит от возбуждения атома, описываемого гамильтонианом взаимодействия $\hat{H}_I = \frac{\hbar\Omega_0\hat{\sigma}_1}{2}$, если использовать приближение вращающихся волн (ПВВ). Здесь $\Omega_0 = \frac{\hat{\mathbf{E}}_L \cdot \mathbf{d}_{12}}{\hbar}$ — частота Раби, которую можно

отождествить с управляющим параметром c [5]. Однако как говорилось выше, в качестве контрольного параметра применительно к данной задаче мы выбрали величину E — амплитуду возбуждающего лазерного поля, в силу того, что выбор Ω_0 не удобен, так как в выражение, его определяющее входит значение дипольного момента, которое мы и пытаемся измерить в ходе эксперимента.

Рассчитывая полевой оператор \hat{N}_D (10) с подстановкой взамен входящих в него операторов поля их выражение через атомные операторы [39] и пренебрегая вкладом вакуумной составляющей, мы должны получить его представление через стохастические атомные операторы населённости $\hat{n}_2(t)$ возбуждённого уровня в виде интеграла по времени

$$\hat{N}_D = S_0 \gamma \int_0^T \hat{n}_2(t) dt. \quad (12)$$

Здесь коэффициент S обозначает безразмерную апертуру фокусирующего устройства — соответствующую долю полного сферического угла. Данное выражение при $\gamma T \gg 1$ описывает величину с асимптотически гауссовскими флуктуациями, так что искомое распределение полного числа квантов, излученных атомом

$$P(db|a) = \text{Tr} \hat{E}(b) \hat{\rho}_T(a, c) \hat{E}(b) \quad (13)$$

после выполнения усреднения по многомоментной матрице плотности состояния исследуемой двухуровневой системы $\hat{\rho}_T$, зависящей от измеряемого и управляющего параметров и всех моментов времени $t \in (0, T)$, с учётом малости времени корреляции γ^{-1} даёт гауссовское распределение. Для характеристики последнего достаточно знать среднее значение $\bar{b} = A\gamma T \bar{n}_2$ и выражающуюся через корреляционную функцию оператора населённости дисперсию σ_b^2 :

$$P(db|a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} e^{-\frac{(b-\bar{b})^2}{2\sigma_b^2}} db. \quad (14)$$

В дополнение к условному распределению (13) для расчёта совместного распределения вероятностей $P(da, db)$ потребуется дополнительно ввести априорное распределение неизвестного параметра $\mu(da)$, так что объём измеряемой информации будет рассчитываться на основе распределения

$$P(da, db) = \mu(da)P(db|a). \quad (15)$$

Ввод распределения $\mu(da)$ определяется нашими априорными знаниями об измеряемой величине дипольного момента d и его вид также влияет на количество совместимой информации, полученной в ходе эксперимента. Например, при точном знании дипольного момента ещё до начал измерений, информация превратится в нуль. И это верно, в силу того, что при измерении мы не получим никаких новых сведений о дипольном моменте, ведь он известен заранее. И наоборот, чем больше неопределённость и незнание того, какое значение должна иметь искомая величина, тем более информации мы получим, так как даже любая грубая её оценка добавляет нам знаний, а стало быть мы получаем новую информацию, которой в дальнейшем сможем распорядиться по собственному усмотрению.

5 Аналитическое рассмотрение задачи

На этом этапе от общих формул, которые были написаны ранее перейдём к выражениям, которыми будут представлены термины, применимые непосредственно к задаче измерения ди-

польного момента двухуровневого атома.

5.1 Формула для расчёта среднего числа зарегистрированных фотонов и её следствия

Сперва выведем формулу, с помощью которой мы сможем оценить \bar{b} — среднее число фотоотсчётов зарегистрированных фотодетектором за время T проведения эксперимента. Будем рассуждать следующим образом. При нахождении системы в вакууме процессы упругой дефазировки отсутствуют и выполняется известное соотношение для времён продольной и поперечной релаксации $\Gamma = \frac{\gamma}{2}$. Частота Раби, характеризующая действие внешнего электромагнитного поля определяется по формуле $\Omega_R = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}}{\hbar}$. Для расчёта скорости γ перехода атома в основное нижнее состояние пользуемся соотношением (9). Формула (??), применённая к случаю стационарного излучения атомом под действием внешнего поля для среднего числа фотоотсчётов \bar{b} , испущенных атомом даёт следующий результат: $\bar{b} = \gamma T$

*overlinen*₂. Если рассматривать достаточно большие средние значения гамма квантов, попавших на счётчик (общим количеством много больше 1, справедливость чего и будем полагать в дальнейшем), то в этом случае распределение зарегистрированных детектором фотонов допустимо считать пуассоновским (вообще понятно, что подобной ситуации всегда можно добиться, если выбрать соответствующий период времени T проведения измерений). Для такой статистики имеем $\overline{b_P} = \sigma_{b_P}^2$. Нужно заметить, что в общем случае постановки подобного эксперимента $\bar{b} \neq \overline{b_P}$, но они связаны друг с другом известной из эксперимента зависимостью, имеющей свой собственный вид для каждой отдельно взятой экспериментальной установки. Но, как было замечено ранее, данная проблема относится к чисто техническим трудностям, и по-этому, мы далее будем считать, что все покинувшие атом фотоны достигают детектора со сто процентной вероятностью. Тогда верно равенство $\bar{b} \equiv \overline{b_P}$, которое будет использовано дальше.

Таким образом, населённость \hat{n}_2 верхнего двухуровневого атома, находящегося в стационарном лазерном поле, может быть выражена следующей формулой (подробно выведенной, например в [37]) \hat{n}_2 [37]:

$$\hat{n}_2 = \frac{1}{2} \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \gamma\Gamma}. \quad (16)$$

Если произвести несложную подстановку и привести необходимые члены, то для значения \bar{b} среднего числа фотоотсчётов мы получим следующее выражение:

$$\bar{b} = T \frac{6\omega^3 c^3 d^2 E^2}{16\hbar\omega^6 d^2 + 9\hbar c^6 E^2}. \quad (17)$$

Данная зависимость определяет закон соответствия с помощью которого, используя среднее количество измеренных фотонов, попадающих в область регистрации фотодетектора можно вычислить значение дипольного момента d_{12} исследуемой двухуровневой системы, что и является целью нашего эксперимента. Однако, мы не никак не можем узнать значение \bar{b} . Измерению это величина не поддаётся, так как фотодетектор обладает способностью считать пойманные им фотоны, суммой которых и является показание детектора b , и ничего более. Но, не смотря на это, мы можем сделать некоторые полезные выводы из полученной формулы 17. Вид данной зависимости показан на рис. 5.1

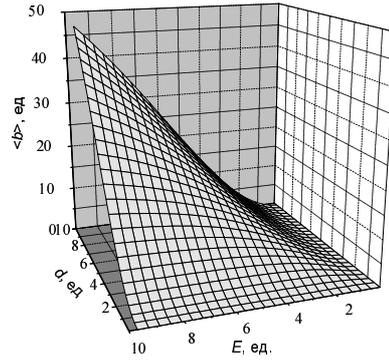


Рис. 2: График зависимости \bar{b} от значения дипольного момента d и напряжённости электрического поля E , измеряемых в безразмерных единицах.

5.1.1 Случай слабого поля

Допустим, величина возбуждающего лазерного поля E , удовлетворяет условию

$$\frac{\omega^6 d^2}{c^6 E^2} \gg 1. \quad (18)$$

Данное соотношение величин дипольного момента и возбуждающего лазерного поля соответствует крайне малой населённости верхнего уровня и таким образом, все электроны, заброшенные им на на верхний уровень сразу же переходят на нижний, излучая квант света и переводя тем самым весь атом в основное состояние. Но так как число электронов, преведённых на верхний уровень прямо пропорционально интенсивности поля, то зависимость \bar{b} от дипольного момента d должна исчезнуть, что и наблюдается в формуле (17) при реализации рассматриваемых условий:

$$\bar{b} = T \frac{3c^3 E^2}{8\hbar\omega^3}. \quad (19)$$

Из независимости \bar{b} от дипольного момента системы следует также независимость условного распределения $P(db|a)$ от d (или от a как мы условились обозначать дипольный момент атома) в 14. Возникает мысль о том, что и информация, полученная в ходе измерения будет нулевой. Численные оценки величины совместимой информации будут даны в следующей главе.

5.1.2 Случай сильного поля

Здесь под сильным полем подразумеваются значения возбуждающего лазерного поля E , удовлетворяющие условию

$$\frac{\omega^6 d^2}{c^6 E^2} \ll 1. \quad (20)$$

Такое соотношение величин дипольного момента и возбуждающего лазерного поля описывает случай насыщения, при котором населённость верхнего уровня системы $\hat{n}_2 = \frac{1}{2}$. В этом случае интенсивность лазерного поля не влияет на излучение атома и среднее число гамма квантов, испущенных системой будут определяться только характеристиками самого атома и в частности дипольным моментом межуровневого перехода. Описанный вид выражения для расчёта \bar{b} находит подтверждение в формуле (21), следующей непосредственно из (17) для

рассматриваемого соотношения параметров E и d

$$\bar{b} = T \frac{2\omega^3 d^2}{3\hbar c^3}. \quad (21)$$

Зависимость \bar{b} от d является квадратичной. Таким образом, в случае сильного возбуждающего поля, следует ожидать наиболее удобного способа измерения дипольного момента рассматриваемой системы.

5.1.3 Случай среднего поля

Под средним полем будем подразумевать все другие значения возбуждающего лазерного поля E . При их наблюдении, очевидно, будет выполняться соотношение

$$\frac{\omega^6 d^2}{c^6 E^2} \sim 1. \quad (22)$$

Случай, соответствующий данному распределению, является промежуточным между двух рассматриваемых до него. Формула (17) для определения \bar{b} в случае среднего поля не упрощается и необходимо рассматривать её полностью. Стало быть, ожидается сложная зависимость количества совместимой информации от управляющих параметров эксперимента.

5.2 Вероятностные меры, определяющие количество совместимой информации

Теперь обратимся собственно к методу расчёта когерентной информации. Прежде всего выберем некоторую априорную информацию о значении дипольного момента рассматриваемой системы. Будем считать, что нам особо не известно, какое значение может принимать дипольный момент системы, однако можно оценить его значение по порядку величины. Таким образом будем считать, что значение среднего дипольного момента системы лежит в пределах от 10^{-19} до 10^{-17} ед. СГС, и вероятность обнаружить его в области da в обозначенном интервале имеет вид $\frac{1}{99}$. То есть, априори все значения, которые может принимать дипольный момент атомного перехода равновероятны.

Вернёмся к условному распределению $P(db|a)$ (14). Оно определяет вероятность того, что при заданных значениях управляющих параметров количество отсчётов b детектора будет лежать в промежутке $[b, b + db]$, при условии равенства дипольного момента величине a . Как показано ранее, данное распределение при соответствующем выборе значений параметров эксперимента хорошо аппроксимируется гауссовской кривой.

Вероятность же, определяемая формулой (15), соответствует вероятности измерения детектором b фотонов, количество которых лежит в промежутке $[b, b + db]$, притом, что дипольный момент a примет при этом значение принадлежащее отрезку $[a, a + da]$.

Используя вероятностную меру $P(db|da) = P(db|a)\mu(da)$ возможно рассчитать полную вероятность $P(db)$ показания фотодетектора, соответствующее b пойманным квантам. Она будет определяться интегралом $P(db) = \int_A P(db|da)$ взятым по переменным a , пробегающим всё множество возможных значений A .

В дальнейшем большее значение будет уделено использованию условной вероятности $P(da|b)$, которая определяется вероятностью нахождения дипольного момента двух уровней системы в промежутке $[a, a + da]$ в случае, когда количество фотонов, зарегистрированных счётчиком равно b . Данная мера наряду с ранее введёнными распределениями успешно используется

для расчёта совместимой информации, переданной посредством квантового канала, описывающего проводимые измерения.

Как подсказывает здравый смысл, должна выполняться цепочка равенств $P(db|a)\mu(da) = P(db, da) = P(da, db) = P(da|b)P(db)$ откуда имеем соотношение $P(db|a)\mu(da) = P(da|b)P(db)$, использование которого в проведении численных расчётов позволит нам сильно сэкономить время и ещё раз наглядно понять смысл квантовой информации.

5.3 Формулы для расчёта совместимой информации

Совместимая информация может быть рассчитана по классической формулам написанным Шенноном:

$$I = \int_A \int_B \log\left[\frac{P(db|a)}{P(db)}\right] P(db|a)\mu(da). \quad (23)$$

Она характеризует степень разрешимости значений, полученных в результате эксперимента по измерению классических характеристик квантовой системы, которые будучи переданными посредством квантового канала, представляющего процесс измерения, поступают на его выход. Информацию, рассчитанную по формуле (23), можно получить с помощью аналогичного соотношения, использующего в качестве расчётных распределений вероятности меры $P(da|b)$ и $\mu(da)$. Такое представление формулы для определения I возможно, в следствие выполнения вышеобозначенного равенства $P(db|a)\mu(da) = P(da|b)P(db)$. После его подстановки формулу (23) получим следующий результат

$$I = \int_A \int_B \log\left[\frac{P(da|b)}{\mu(da)}\right] P(da|b)P(db). \quad (24)$$

Данная формула позволит нам наглядно проиллюстрировать смысл совместимой информации.

Для этого рассмотрим графическое представление условной вероятности $P(da|b)$ на фоне вероятностной меры $P(da)$ 5.3. Если при каком-то определённом значении b характерная ши-

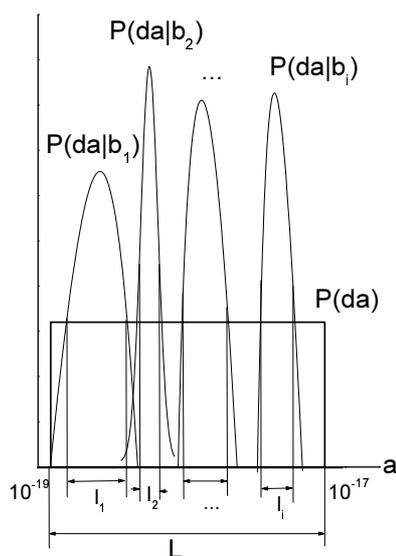


Рис. 3: Наглядное представление содержания совместимой информации

рина первой (например, ширина на полу-высоте своего максимального значения) меньше, чем ширина полного распределения $P(da)$, которая в нашем случае равна 9910^{-19} , то измерение величины дипольного момента при данном значении b возможно осуществить, и при том отклонение измеренной величины точного значения дипольного момента сильно уменьшится. Уменьшение неопределённости нашего знания о точности наблюдения величины дипольного момента произошло во столько раз, во сколько раз отличаются ширины двух распределений. Логарифмом именно этого отношения можно по порядку величины оценить количество совместимой квантовой информации, извлечённой в ходе эксперимента. Возвращаясь к рисунку и рассматривая в качестве $P(da|b)$ i -ое условное распределение $P(da|b_i)$, можно рассчитать совместимую информацию по формуле $\log \frac{l_i}{L}$. Однако, условные распределения для разных значений параметра b_i могут сильно отличаться друг от друга. В частности, каждое имеет свою собственную ширину, а значит, для неё определяется собственная совместимая информация. Значение зарегистрированных фотоотсчётов b не может быть известно заранее до проведения эксперимента. Таким образом, для правильной оценки количества совместимой информации необходимо взять усреднённое значение ширины условного распределения информации. Таким образом, для более точной оценки квантовой информации напомним формулу:

$$I = \frac{\langle \int_i l_i \rangle}{L}. \quad (25)$$

Нужно отметить, что формула (24) представляет написанное здесь выражение на более математическом языке, где расчёт ширины условных распределений и усреднение их по совокупности осуществляется интегрированием $\log \frac{P(da|b)}{\mu(da)}$ с весом $P(da, db)$ по пространству всевозможных значений дипольного момента a и числа b зарегистрированных фотонов. При расчётах, производимых в следующей главе будем пользоваться оценочной формулой для более наглядного представления процесса вычисления квантовой совместимой информации.

6 Численные расчёты

В заключении опишем численные расчёты совместимой информации, проделанные для некоторых специально подобранных значений управляющих параметров, описывающих наиболее характерные случаи осуществления эксперимента. Для начала сделаем небольшое преобразование исходной формулы (17) для \bar{b} с целью наибольшего удобства проведения расчётов. В единицах системы СГС $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$, $\hbar = 10^{-27}$ эрг сек. Для оценок ω возьмём равной $10^{15} \frac{1}{\text{сек}}$. Априорное распределение $\mu(da)$ было введено выше. Будем предполагать, что оно находится в пределах от 10^{-19} до 10^{-17} единиц СГС, и вид её имеет прямоугольную форму. То есть $\mu(da)$ принимает следующий вид

$$\mu(da) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & a \in [10^{-19}, 10^{-17}] \\ 0, & a \in [-\infty, 10^{-19}) \cup (10^{-17}, \infty]. \end{cases} \quad (26)$$

Теперь выражение, определяющее \bar{b} , написанное в единицах СГС преобразуется следующим образом

$$\bar{b} = T \frac{10^{13} E^2}{d^2 + 4 \cdot 10^8 E^2}. \quad (27)$$

Тогда характерная величина, применяемая для определения сильного и слабого полей будет равна $E_x = 210^{-4} d$ в ед. СГС. То есть большое поле обладает интенсивностью много большей E_x , а слабое — много меньшей её.

Для расчётов воспользуемся формулой, аналогичной (25), подсчитаем число $N = \frac{P(db|a)}{P(db)}$ для случая сильного и среднего полей. Точнее напряжённость поля будет взята постоянной и равной 10^{-2} ед. СГС но, рассмотрев два значения d , равные $3 \cdot 10^{-17}$ и $60 \cdot 10^{-17}$ ед. СГС, мы обсудим случаи соответственно сильного и среднего поля. Ранее был проведён первоначальный качественный анализ и было выяснено, что оптимизация измерений происходит при больших значениях амплитуды поля, много больших величины E_x , теперь покажем это с помощью численного расчёта.

Функции плотности условных вероятностей $p(db|a)$ для описываемых значений a будут иметь вид, показанный на рис. 6. Функция распределения полной вероятности $p(b)$ показана ниже на 6. Применяя формулу для расчёта числа N имеем следующие результаты, представленные на (рис. 6)

Для получения окончательного значения совместимой информации необходимо усреднить $\log N$ по всевозможным наблюдаемым значениям параметров a и b . При этом, конечно, оценив количество совместимой информации значением $\log N$ мы будем иметь верный порядок искомой величины.

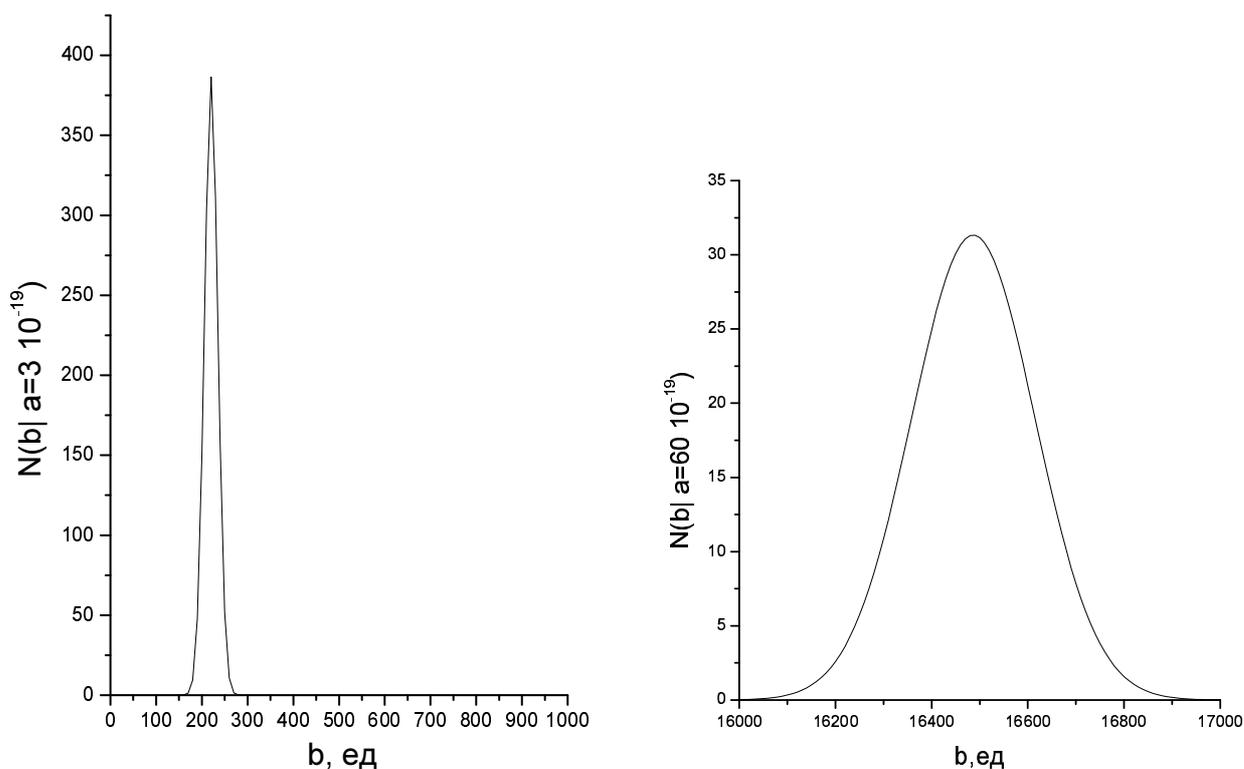


Рис. 4: Зависимости $p(b|a)$ для различных значений параметров a

7 Выводы

В качестве итогов проделанной работы можно указать:

- Рассмотрена возможность применения понятия совместимой информации к описанию экспериментальных схем.

- С помощью расчёта совместимой информации рассмотрена оптимизация процесса измерения дипольного момента атомного перехода двухуровневой системы по напряжённости возбуждающего излучения.
- Наиболее эффективные измерения в данной схеме будут иметь место при значении амплитуды лазерного поля много большего 210^{-2} ед. СГС.

Список литературы

- [1] См., например, А. Садбери, *Квантовая механика и физика элементарных частиц*, М.:Мир, 1989, глава 5.
- [2] См., например, I. V. Bargatin, B. A. Grishanin, and V. N. Zadkov, *emphPhys. Rev. A* **61**, 052305 (2000).
- [3] Kitagawa M, Ueda M *Phys. Rev. A* **47** 5138 (1993)
- [4] Gisin N et al., *quant-ph/0101098* (12 Jan 2001)
- [5] B. A. Grishanin and V. N. Zadkov, "Coherent information: A Key to Information Analysis of Quantum System", in: *Proceedings of SPIE, ICONO 2001, Minsk, Belarus, June 26 - July 1, 2001*.
- [6] B. A. Grishanin and V. N. Zadkov, *Phys. Rev. A* **62**, 032303 (2000).
- [7] Boschi D et al. *Phys. Rev. Lett.* **80** 1121 (1998)
- [8] Bouwmeester D et al. *Nature* (London) **390** 575 (1998)
- [9] Furusawa A et al. *Science* **282** 706 (1998)
- [10] Kim Y-H, Kulik S P, Shih Y, *quant-ph/0010046* (11 Oct 2000)
- [11] Mattle K et al. *Phys. Rev. Lett.* **76** 4656 (1996)
- [12] Bennett C H et al. *Phys. Rev. Lett.* **83** 3081 (1999)
- [13] Ельяшевич М А *Атомная и молекулярная спектроскопия* (М.: Эдиториал УРСС, 2001)
- [14] Д. П. Бокарев, *Курсовая работа за 4 курс*
- [15] Р. Галлагер, *emphТеория информации и надёжная связь* (Сов. Радио, Москва, 1974)
- [16] Shannon C E *Bell Syst. Tech. J.* **27**, 379 (1948)
- [17] Галлагер Р Дж *Теория информации и надёжная связь* (М.: Сов. Радио, 1974)
- [18] Brukner Č, Zeilinger A, *quant-ph/0006087*
- [19] Hall M J W, *quant-ph/0007116*
- [20] Brukner Č, Zeilinger A, *quant-ph/0008091*

- [21] Bouwmeester D, Ekert A, Zeilinger A (Eds) *The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation* (New York: Springer, 2000)
- [22] Steane A *Rep. Prog. Phys.* **61** 117 (1998)
- [23] Валиев К А, Кокин А А *Квантовые компьютеры: надежды и реальность* (Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001)
- [24] Jones K R W *Phys. Rev. A* **50**, 3682 (1994)
- [25] Холево А С *Пробл. передачи информ.* **9**, 31 (1973)
- [26] Hall M J W *Phys. Rev. A* **55**, 100 (1997)
- [27] Schumacher B, Nielsen M A *Phys. Rev. A* **54**, 2629 (1996)
- [28] Lloyd S *Phys. Rev. A* **55**, 1613 (1997)
- [29] Schumacher B W *Phys. Rev. A* **51**, 2738 (1995)
- [30] Гришанин Б А *Проблемы передачи информации* **38**, № 1, 31 (2002).
- [31] Гришанин Б А *Изв. АН СССР Техническая кибернетика* **11** (5), 127 (1973)
- [32] Preskill J in: *Lecture notes on Physics 229: Quantum information and computation*, <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>
- [33] Менский М Б *Квантовые измерения и декогеренция* (М: Физматлит, 2001)
- [34] Grishanin B A, Zadkov V N *Laser Physics* **11**, No. 11 (2001, в печати)
- [35] Brukner Č, Zeilinger A *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3354 (1999)
- [36] Glauber R J, in: *Quantum Optics and Electronics*, (Eds., C DeWitt, A Blandin, and C Cohen-Tannoudji) (New York: Gordon&Breach, 1965)
- [37] Гришанин Б А *Квантовые случайные процессы*, <http://comsim1.phys.msu.su/publications/papers/bagbook.ps.gz>
- [38] R. J. Glauber, "Optical coherence and photon statistics", In: *Quantum Optics and Electronics*, C. DeWitt, A. Blandin, and C. Cohen-Tannoudji Eds, New York, Gordon&Breach 1965. Имеется перевод: *Квантовая оптика и квантовая радиофизика*, под ред. О. В. Богданкевича и О. Н. Крохина, Мир, Москва, 1966.
- [39] Э. Мандель, Л. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Москва, Физматлит, 2000

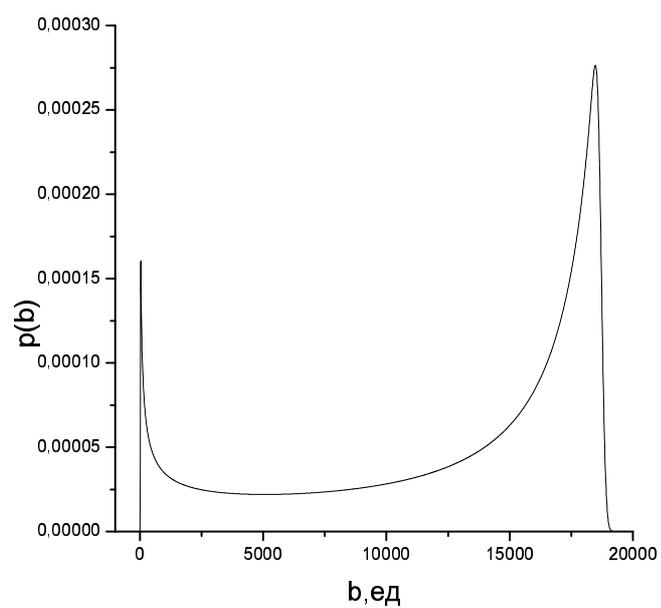


Рис. 5: Ход зависимости $p(b)$.

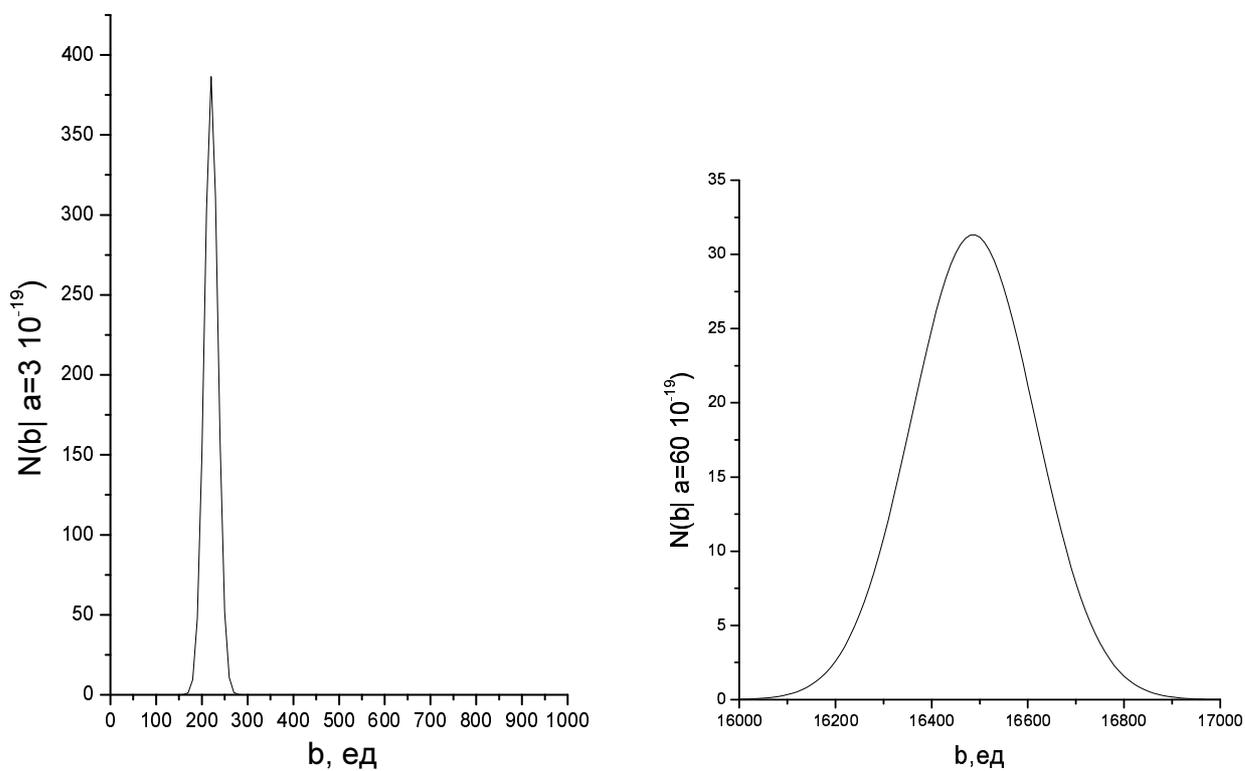


Рис. 6: Зависимости $N(b|a)$ для различных значений параметров a